|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | **Домашнє завдання № 8**  **з дисципліни “Математичне моделювання систем та процесів”**  **студента групи КВ-64М**  **Подольського Сергія Валентиновича**      2011**.**  12 **.**  04  **(*рік*) (*місяць*) (*число*)** |

**Варіант № 1**

Знайти кількість солі в кожному резервуарі в залежності від часу та побудувати графіки цих функцій і зробити висновки.

Отриману в процесі розв’язання СЛДР розв’язати методом власних значень та перевірити розв’язок за допомогою математичного пакету.

Додатково розглянути випадок, коли спочатку всі 3 баки містять прісну воду, а в перший бак вливається розчин, що містить солі.

Розглянемо перший випадок. Отримаємо СЛДР виду

де

Отримаємо задачу Коші

для вектора . Проста форма матриці

одразу призводить до характеристичного рівняння

Таким чином, матриця коефіцієнтів у рівнянні має різні власні значення

**Випадок 1**: . Підставляючи в попередню матрицю, отримаємо рівняння

для відповідного власного вектора .

Отримаємо систему рівнянь

Підберемо найменші цілі по модулю значення , які задовольняють систему:

Таким чином, власний вектор

відповідає власному значенню .

**Випадок 2**: . Підставляючи в попередню матрицю, отримаємо рівняння

для відповідного власного вектора . Кожен з перших двох рядків дає нам значення .

Отримаємо систему рівнянь

Підберемо найменші цілі по модулю значення , які задовольняють систему:

Таким чином, власний вектор

відповідає власному значенню .

**Випадок 3**: . Підставляючи в попередню матрицю, отримаємо рівняння

для відповідного власного вектора . Перший та третій рядки показують, що та відповідно, але нульовий третій стовпець дозволяє в якості вибрати довільне число (але відмінне від нуля).

Отримаємо

Таким чином, власний вектор

відповідає власному значенню .

Відповідно, загальний розв’язок

має вигляд

Отримані скалярні рівняння мають вигляд

*,*

*,*

.

Коли ми накладаємо початкові умови , , , ми отримуємо систему рівнянь

Розв’язком системи є

Таким чином, в результаті, кількості солі в момент часу в трьох розсольних баках подаються функціями

*,*

*,*

.

Виконаємо перевірку, розв’язавши отриману систему в пакеті Matlab, а також побудуємо графіки отриманих функцій. Для цього використаємо такий скрипт для аналітичного розв’язання:

|  |
| --- |
| eq1 = 'Dx1 = -1/2 \* x1';  eq2 = 'Dx2 = 1/2 \* x1 - 1/5 \* x2';  eq3 = 'Dx3 = 1/5 \* x2 - 1/7 \* x3';    cond1 = 'x1(0) = 3';  cond2 = 'x2(0) = 0';  cond3 = 'x3(0) = 0';    [x1, x2, x3] = dsolve(eq1, eq2, eq3, cond1, cond2, cond3)    limits = [0 40];  figure, hold on  fplot(inline(x1), limits, 'r')  fplot(inline(x2), limits, 'g')  fplot(inline(x3), limits, 'b') |

В результаті отримаємо:

|  |
| --- |
| x1 =  3/exp(t/2)  x2 =  (5\*exp((3\*t)/10))/exp(t/2) - 5/exp(t/2)  x3 =  14/(5\*exp(t/2)) - (35\*exp((3\*t)/10))/(2\*exp(t/2)) + (147\*exp((5\*t)/14))/(10\*exp(t/2)) |

Очевидно, що розв’язки, отримані за допомогою пакету Matlab, спрощуються до розв’язків, отриманих вручну методом власних значень.

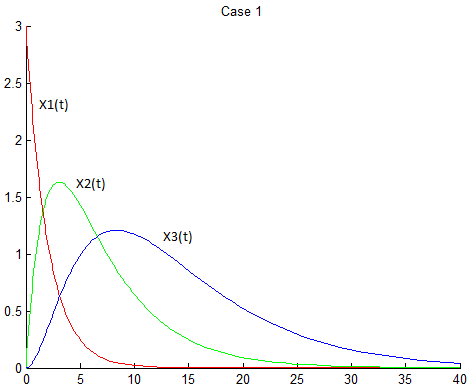


Рис.  1. Функції, що відображають вміст солі в баках в першому випадку

Із графіків функцій, зображених на рис.  1, видно, що сіль із баку 1 швидко вимивається прісною водою, яка поступає, а при . Кількості та солі в баках 2 та 3 спочатку зростають, а потім наближаються до нуля, оскільки з усієї системи з трьома баками сіль вимивається при .

Додатково розглянемо тепер випадок, коли спочатку всі 3 баки містять прісну воду, а в перший бак вливається розчин, що містить солі. Отримаємо модифіковану систему диференціальних рівнянь виду

при початкових значеннях

Розв’яжемо систему за допомогою пакету Matlab. Для цього після запуску першого скрипта виконаємо скрипт, що модифікує попередні умови:

|  |
| --- |
| eq1 = 'Dx1 = 10/35-1/2 \* x1';  cond1 = 'x1(0) = 0'  [x1, x2, x3] = dsolve(eq1, eq2, eq3, cond1, cond2, cond3)  figure, hold on  title('Case 2')  fplot(inline(x1), limits, 'r')  fplot(inline(x2), limits, 'g')  fplot(inline(x3), limits, 'b') |

В результаті отримаємо:

|  |
| --- |
| x1 =  4/7 - 4/(7\*exp(t/2))  x2 =  20/(21\*exp(t/2)) - 50/(21\*exp(t/5)) + 10/7  x3 =  25/(3\*exp(t/5)) - 8/(15\*exp(t/2)) - 49/(5\*exp(t/7)) + 2 |

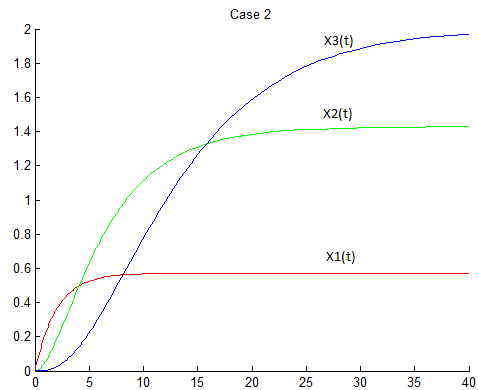


Рис.  2. Функції, що відображають вміст солі в баках в другому випадку

Із графіків функцій, зображених на рис.  2 видно, що спочатку у всіх баках сіль відсутня, оскільки в них міститься прісна вода, проте з часом кількість солі в кожному баку встановлюється пропорційною до його об’єму, оскільки концентрація солі у всіх них встановлюється близькою до вхідної.